Chapter 1: Part II

Note Title 1/17/2011

The 4-color problem — مسئله چهار رنگ

حدس : هر نقشه جغرافیایی را می‌توان با 4 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

1852

مسئله چهار رنگ ←
- نظریه گراف‌ها
- ترکیبیات و ریاضیات گسسته
- توپولوژی و ....

نکته اول :

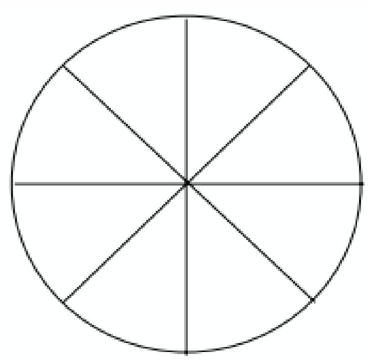


Fig. 2.22 *This map is excluded from the four-color conjecture.*

نکته دوم:

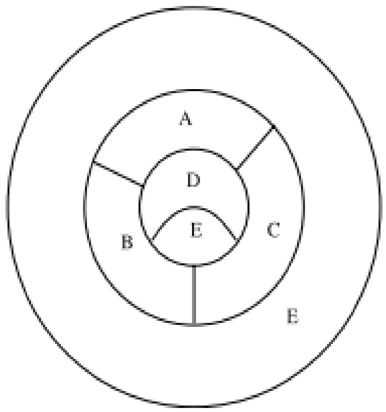
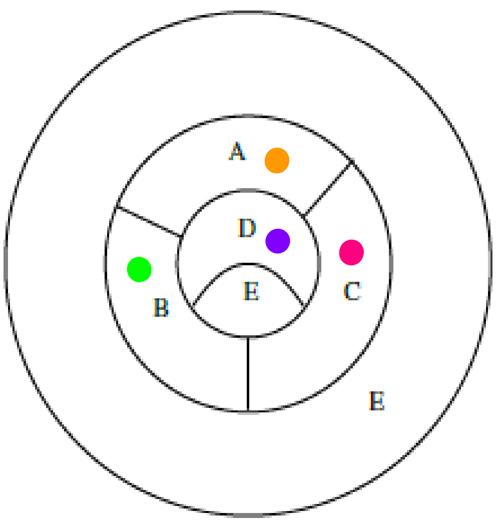
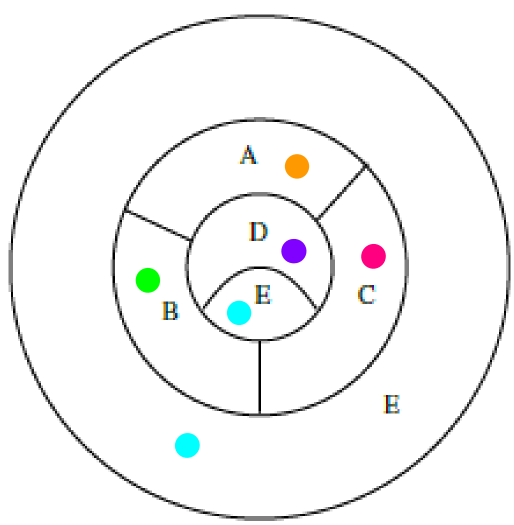


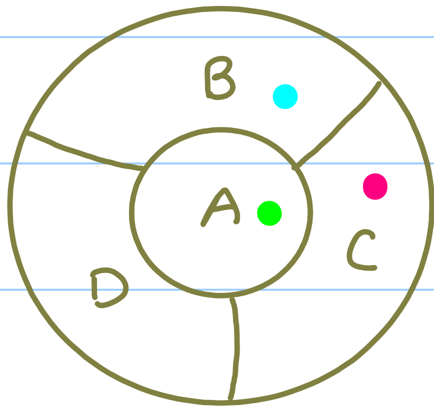
Fig. 2.23 *Map with disconnected regions that does not fall into the four-color theorem.*





- دمورگان 1852 : سه رنگ کافی نیست.

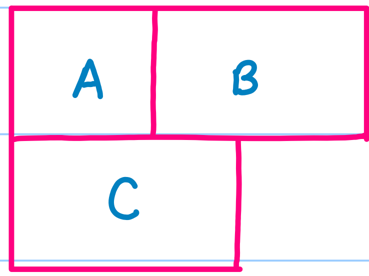
- مثال نقض:



این نقشه را نمی‌توان با سه رنگ، رنگ کرد.

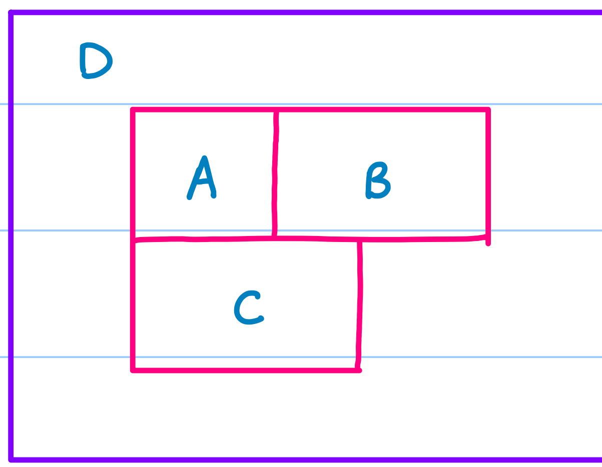
- De Morgan's proof. 1852

- ایده اصلی: در هر نقشه ای بیش از ۴ کشور با هم همسایه نیستند.



• یک نقشه که در آن ۳ کشور دو به دو با هم همسایه هستند.

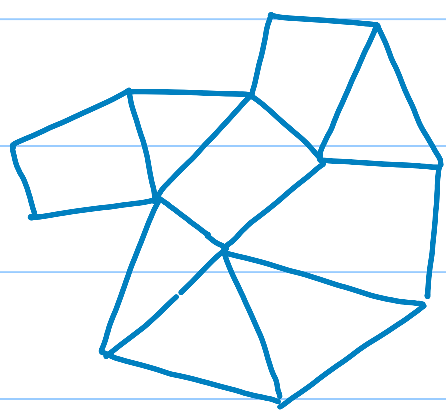
• یک نقشه که در آن ۴ کشور A ، B ، C ، D ، دو به دو با هم همسایه هستند.

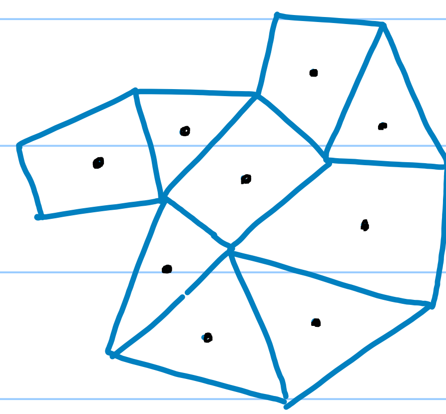


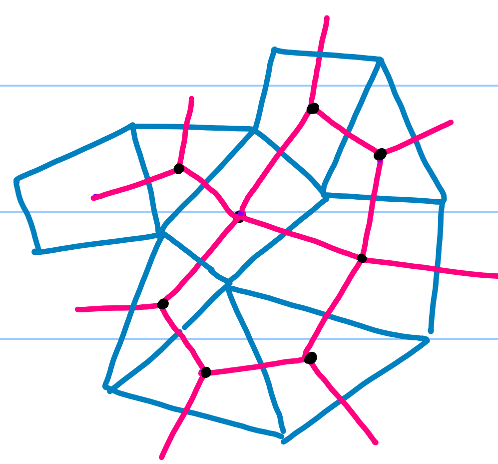
ایده‌ی اصلی اثبات دو مسئله‌مان : نقشه‌ای وجود ندارد که در آن ۵ کشور دو به دو همسایه باشند!

• تناظر یک به یک بین گراف ها و نقشه ها.

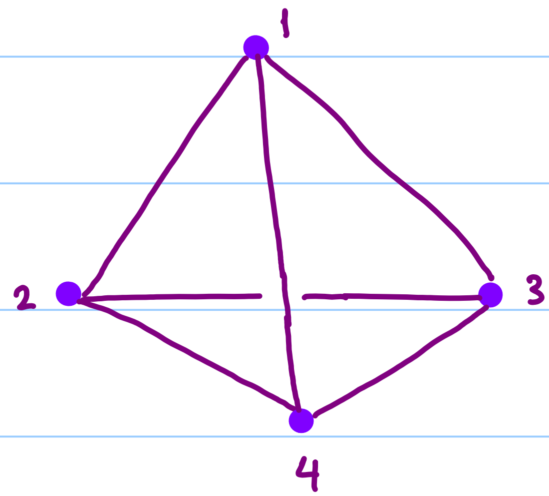
به ازای هر نقشه می توان یک گراف به ترتیب زیر رسم کرد.



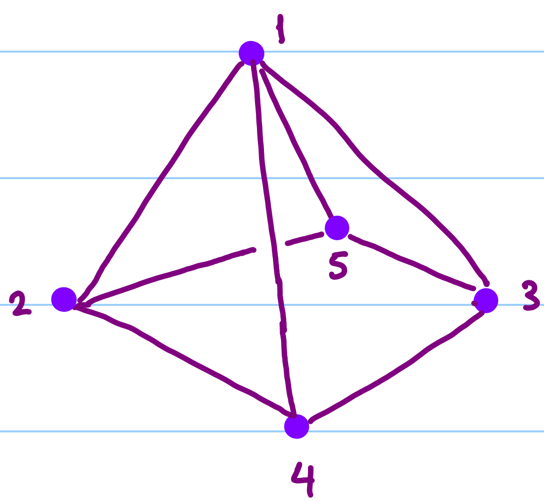




اگر چهار کشور در سطح دو به دو باهم همسایه باشند، شکل گراف مربوطه به صورت زیر است.



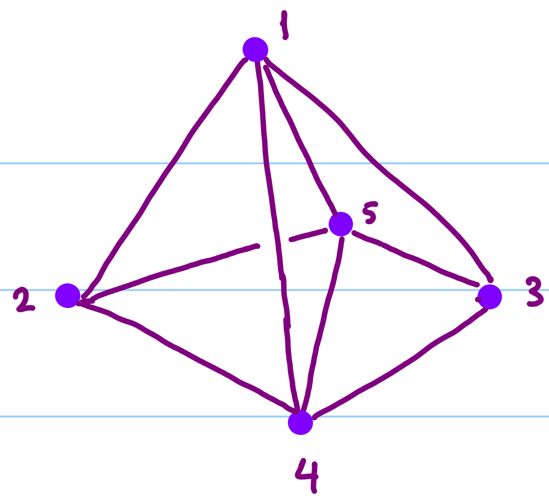
اگر یک کشور اضافه کنیم و بخواهیم تعداد بیشتر از ۴ کشور دو به دو باهم همسایه باشند وضعیت به شکل زیر خواهد بود.



در این شکل ۵ کشور در سطح وجود دارند ولی هنوز هم ۴ کشور دو به دو باهم همسایه نیستند.

مثلاً (4,5) و (2,3) باهم همسایه نیستند.

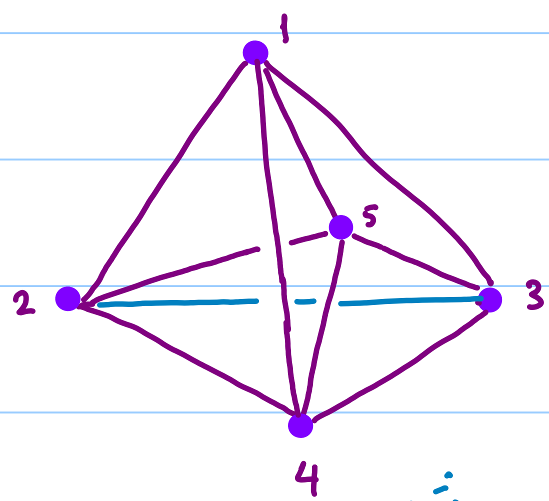
می‌توان شکل زیر را در نظر گرفت که در آن (4,5) نیز باهم همسایه هستند.



این شکل هنوز یک کره است زیرا مشخصه اویلر آن برابر است با:

$$\chi = 5 - 9 + 6 = 2$$

ولی دقت کنید که (2,3) هنوز با هم جمع نشده‌اند. اگر (۲,۳) را نیز با هم جمع کنیم، آنگاه شکل به صورت زیر در می‌آید:



در این صورت هم چنین می‌توان دید که این شکل دیگر کره نیست [illegible]. این امر را هم به صورت شهودی و هم می‌توان دید هم با محاسبه مشخصه اویلر:

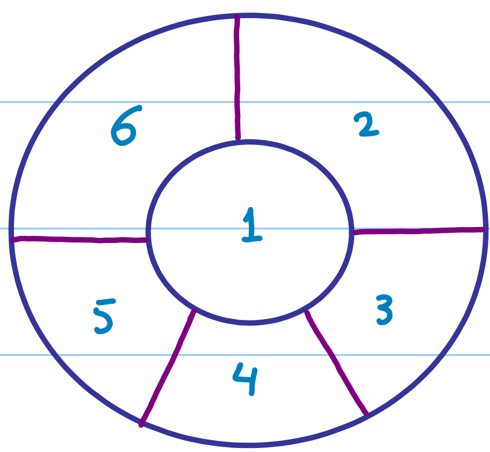
در واقع اضافه کردن ضلع (34) E را یک واحد افزایش داده، ولی F دو واحد افزایش یافته است {وجه‌های (۲۳۴) و (۲۳۵)}.

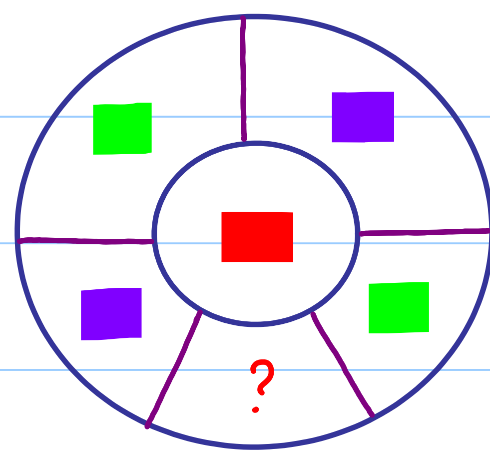
دقت کنید که قبلاً (2345) یک وجه بوده است. به همین دلیل افزایش یک ضلع (23) دو وجه جدید یعنی (۲۳۴) و (۲۳۵) را اضافه کرده و در نتیجه مشخصه اویلر را تغییر داده است.

اما خود دمورگان خیلی زود فهمید که اثباتش اشکال دارد.

این قضیه با قضیهٔ ۴ رنگ تفاوت دارد.

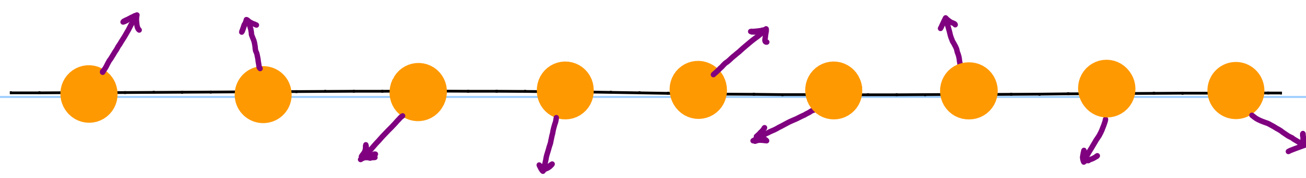
Global (Topological) obstruction





با وجود این که در شکل سمت چپ هیچ ۴ کشوری با هم همسایه نیستند ولی
برای رنگ آمیزی به ۴ رنگ احتیاج داریم.

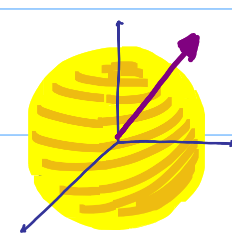
Models With O(n) Symmetry.



$$H = -\sum_i J_i \, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$$

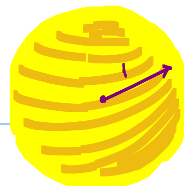
$$Z_N = \int D_N\Omega \; e^{\sum_i J_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}}$$

$$D_N\Omega = d\Omega_1^{(n)} \, d\Omega_2^{(n)} \cdots d\Omega_N^{(n)}$$



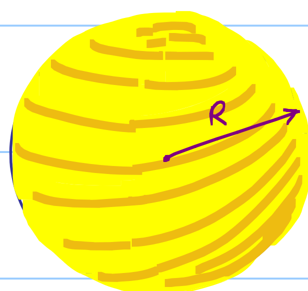
$d^n\Omega$ = المان سطح ابرکرهٔ n بعدی با شعاع 1

سطح کره: n بعدی با شعاع ۱ $= S_n(1)$



$$\boxed{S_n(1) = \int d\Omega^n}$$

سطح کره: n بعدی با شعاع R $= S_n(R)$



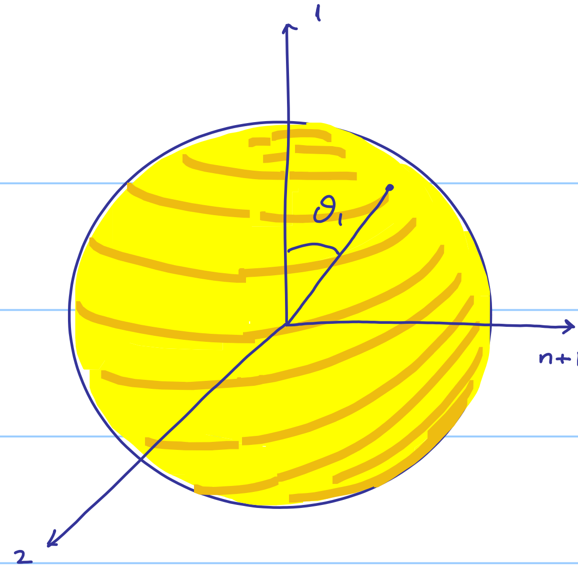
$$S_n(R) = R^n S_n(1)$$

حجم کره: n بعدی با شعاع R $= B_n(R)$

$$B_n(R) = \int_0^R S_n(r)\,dr = \int_0^R r^n S_n(1)\,dr = \frac{1}{n+1} R^{n+1} S_n(1).$$

$$\boxed{B_n(R) = \frac{1}{n+1} R^{n+1} S_n(1)}$$

$d^n\Omega$ چیست؟



$n=2$ کرهٔ دو بعدی

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2$ $\qquad \theta_1 : 0 \to \pi \;,\; \theta_2 : 0 \to 2\pi$

$$dx_1\,dx_2\,dx_3 = r^2\,dr\,\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\theta_2$$

$$\boxed{d\Omega^{(2)} = \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\theta_2}$$

الان سطح را برای کرهٔ
دو بعدی

$n=3$ $\qquad x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

$x_4 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$

$$dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 = r^3\,dr\,\sin^2\theta_1\,\sin^1\theta_2\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3\,.$$

الان سطح برای کرهٔ ۳ بعدی

$$\boxed{d\Omega^{(3)} = \sin^2\theta_1 \, \sin^1\theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3}$$

$$\rightarrow \quad d\Omega^{(3)} = \sin^2\theta_1 \, d\theta_1 \, d\Omega^{(2)}$$

$$x_1 = \cos\theta_1$$

$$x_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2$$

$$x_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \dots \sin\theta_{n-1} \cos\theta_n$$

$$x_{n+1} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \dots \sin\theta_{n-1} \sin\theta_n .$$

$$\rightarrow \quad dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} = r^n \, dr \, d\Omega^{(n)}$$

$$d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1}\theta_1 \, \sin^{n-2}\theta_2 \dots \sin^1\theta_{n-1} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \dots d\theta_{n-1} \, d\theta_n .$$

$$d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1}\theta_1 \sin^{n-2}\theta_2 \cdots \sin^{1}\theta_{n-1}\, d\theta_1\, d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1}\, d\theta_n .$$

$$d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1}\theta_1\, d\theta_1\, d\Omega^{(n-1)}$$

$$\rightarrow \boxed{S_n(1) = 2\,(\pi)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$$

$S_1(1) =$ محیط دایره $= 2\pi$

$S_2(1) =$ سطح کره دو بعدی $= 2\,\pi^{3/2} \dfrac{1}{\Gamma(3/2)} = 4\pi$

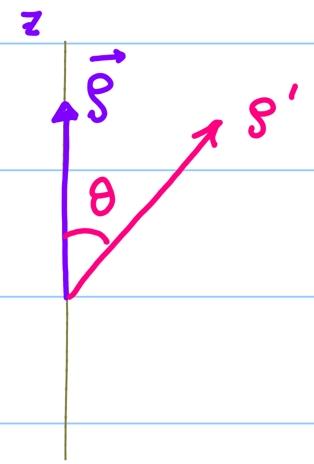
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

• محاسبه‌ی تابع پارش مدل $O(n)$ به روش تکرار Recursive Method

$$Z_{N+1} = \int D_{N+1} S \; e^{\sum_{i=1}^{N-1} J_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}} \; e^{J_N \vec{S}_N \cdot \vec{S}_{N+1}}$$

$$= \int D_N S \left(\quad '' \quad \right) \int d^{(n)} S_{N+1} \; e^{J_N \vec{S}_N \cdot \vec{S}_{N+1}}$$

$$\int e^{J \vec{S} \cdot \vec{S}'} \, d^{(n)} \vec{S}' = \lambda_1(n, J)$$



$$\lambda_1(n, J) = \int e^{J \cos\theta} \, d^n \Omega$$

$$Z_N = [\lambda_1(n,J)]^{N-1} \int d\Omega^n$$

$$\boxed{Z_N = [\lambda_1(n,J)]^{N-1} \, S_n(1)}$$

- dim:

$$\lambda_1(2,J) = \int e^{J\vec{s}\cdot\vec{s}'} d^2 s' = \int e^{J\cos\theta} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} e^{J\cos\theta} \, d\cos\theta = \frac{2\pi}{J}\left(e^{J} - e^{-J}\right)$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1(2,J) = 4\pi \frac{\sinh J}{J}$$

$$Z_N(n=2,J) = \underset{\substack{\uparrow \\ S_2(1)}}{4\pi} \left(4\pi \frac{\sinh J}{J}\right)^{N-1}$$

- for $n=3$ $\quad dS^{(3)} = \sin^2\theta_1 \, \sin\theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\phi$

$$\lambda_1(3,J) = \int d^{(3)}S' \, e^{J S\cdot S'} = \int \sin^2\theta_1 \, \sin\theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\phi \, e^{J\cos\theta_1}$$

$$= \left(\int \sin^2\theta_1 \, e^{J\cos\theta_1} \, d\theta_1\right) \underbrace{\int \sin\theta_2 \, d\theta_2 \, d\phi}_{S_2(1)}$$

$$\underline{\lambda_1(3,J) = \left(\int \sin^2\theta_1 \, e^{J\cos\theta_1} \, d\theta_1\right) S_2(1)}$$

یادآوری

$$\boxed{d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1}\theta_1 \, d\theta_1 \, d\Omega^{(n-1)}}$$

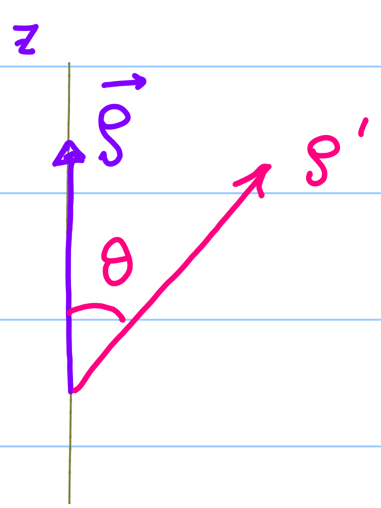
$$\boxed{\lambda_1(n,J) = \left(\int \sin^{n-1}\theta \, e^{J\cos\theta} \, d\theta\right) S_{n-1}(1)}$$

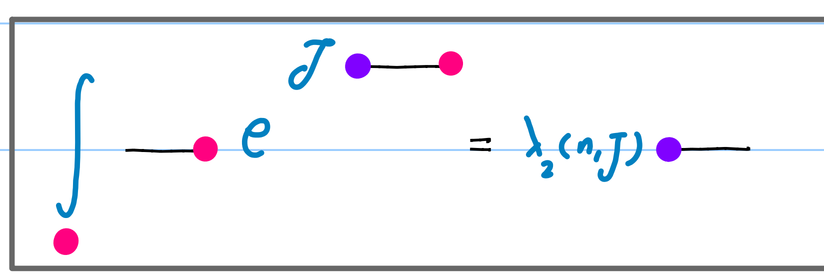
Correlation Functions

تابع همبستگی در مدل O(n).

$$\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\hat{\Omega}_1 \ldots d\hat{\Omega}_N \, (S_k \cdot S_{k+r}) \, e^{J \sum S_i \cdot S_{i+1}}$$

$$\int \vec{S}' \, e^{J \vec{S}\cdot\vec{S}'} \, d\hat{S}' = \lambda_2(n,J) \, \vec{S}$$

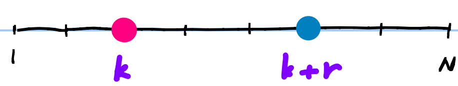




$$\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \frac{1}{Z_N} \int S_k \cdot S_{k+r} \, e^{J S_1 \cdot S_2} \, e^{J S_2 \cdot S_3} \cdots e^{J S_{N-1} \cdot S_N}$$

$$= \frac{A_N}{Z_N} \qquad Z_N = S_n(1) \left[\lambda_1(n, J) \right]^{N-1}$$

$$A_N = \int$$



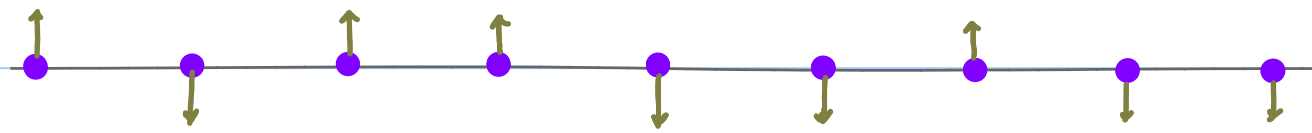
$$e^{J S_1 \cdot S_2} \, e^{J S_2 \cdot S_3} \cdots e^{J S_{N-1} \cdot S_1}$$

$$= S_n(1) \left[\lambda_1(n, J) \right]^{k} \left[\lambda_2(n, J) \right]^{r} \left[\lambda_1(n, J) \right]^{N-k-r}$$

$$\boxed{\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \left[\frac{\lambda_2(n, J)}{\lambda_1(n, J)} \right]^{r}}$$

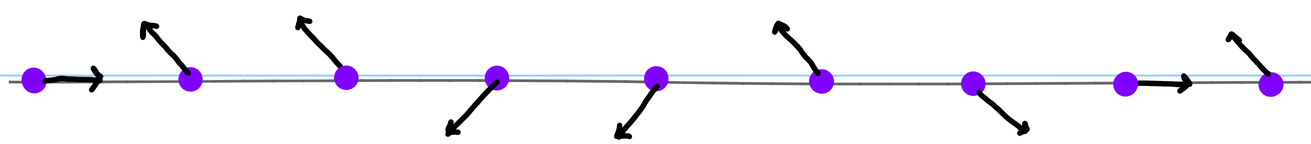
Models With Zn Symmetry.

Ising Model = Z_2 Model

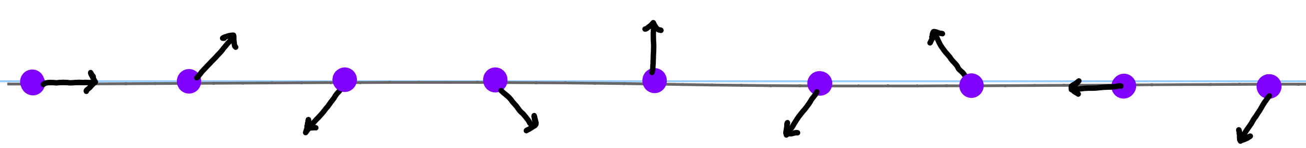


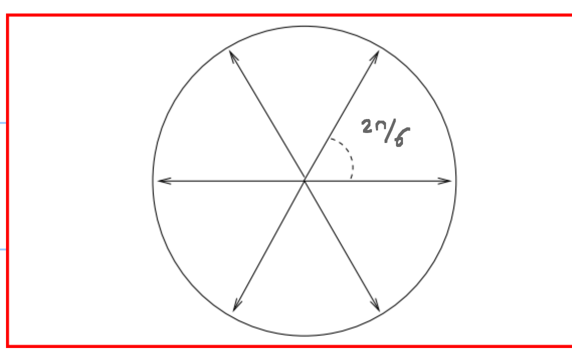
Z_3 Model

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

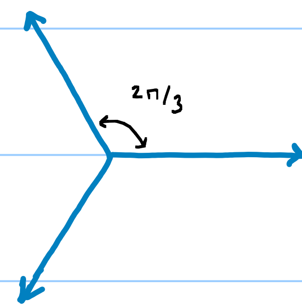


Z_6 Model





Z_3 Model



$$\rightarrow \quad \frac{2}{3}\left(S_i \cdot S_j + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & S_i = S_j \\ 0 & S_i \neq S_j \end{cases}$$

Z_3 Model = 3-state potts Model.

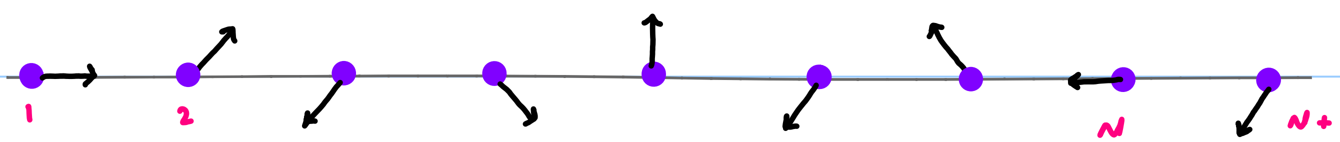
$$S_k \longleftrightarrow \quad \phi_k = \frac{2\pi}{n}\theta_k \qquad \theta_k = 0, 1, \dots n-1$$

$$H = -J \sum_{\langle k,l \rangle} S_k \cdot S_l$$

$$\rightarrow \quad H = -J \sum_{\langle k,l \rangle} \cos(\phi_k - \phi_l)$$

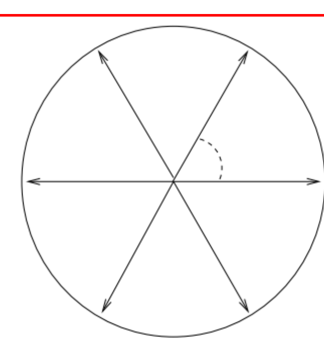
$$H = -J \sum_{\langle k,l\rangle} \cos \frac{2\pi}{n}(\theta_k - \theta_l)$$

$$Z_N = \sum_{\theta_1,\,\dots\,\theta_N=0}^{n-1} e^{J\sum_{k=1}^{N-1}\cos\frac{2\pi}{n}(\theta_k-\theta_{k+1})}$$



$$Z_{N+1} = \sum_{\theta_1\dots\theta_N} e^{J\sum_{k=1}^{N-1}\cos\frac{2\pi}{n}(\theta_k-\theta_{k+1})} \underbrace{\sum_{\theta_{N+1}=0}^{n} e^{J\cos\frac{2\pi}{n}(\theta_N-\theta_{N+1})}}_{Q(\theta_N)}$$

$n=3$ $$Q(\theta_N) = e^{J\cos\frac{2\pi}{3}(\theta_N)} + e^{J\cos\frac{2\pi}{3}(\theta_N-1)} + e^{J\cos\frac{2\pi}{3}(\theta_N-2)}$$



$$Q = Q(0) = e^{J} + e^{-J/2} + e^{-J/2} = e^{J} + 2e^{-J/2}$$

$$\boxed{Z_{N\,(n=3)} = 3\left(e^{J} + 2e^{-J/2}\right)^{N-1}}$$

$$\boxed{Z_{N+1} = Z_N \sum_{\theta_{N+1}=0}^{n-1} \exp\left[\mathcal{J} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(\theta_N - \theta_{N+1})\right)\right],}$$

$$\boxed{\mu_1(\mathcal{J}, n) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left[\mathcal{J} \cos\frac{2\pi k}{n}\right].}$$

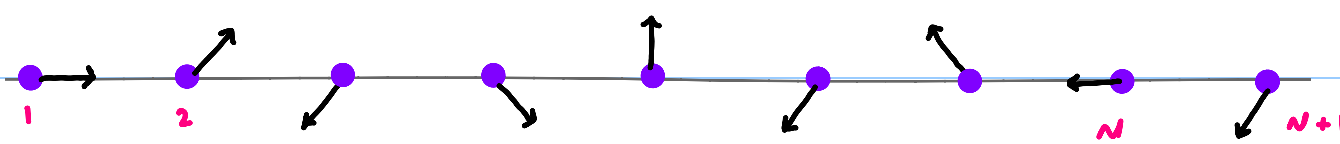
$$\mu_1(J, 4) = \sum_{k=0}^{3} e^{J \cos\frac{2\pi k}{4}} = \sum_{k=0}^{3} e^{J \cos\frac{\pi k}{2}}$$

$$\mu_1(J, 4) = e^{J} + 1 + e^{-J} + 1 = 2(1 + \cos J)$$

$$\boxed{Z_N(J,4) = 4\left[2(1+\cosh J)\right]^{N-1}}$$

$$\boxed{Z_N = n\left[\mu_1(\mathcal{J},n)\right]^{N-1}.}$$

محاسبهٔ تابع پارش با استفاده از روش ماتریس انتقال.



$$Z_N = \sum_{\theta_1\cdots\theta_N} e^{J\sum_{k=1}^{N-1} S_i\cdot S_{i+1}}$$

$$= \sum_{\theta_1\cdots\theta_N} \prod_{k=1}^{N-1} e^{J\, S_i\cdot S_{i+1}}$$

$$= \sum_{\theta_1\cdots\theta_N} \prod_{k=1}^{N-1} e^{J\cos\frac{2\pi}{N}(\theta_i-\theta_{i+1})}$$

$$V(\theta_1, \theta_2) = e^{J \cos \frac{2\pi}{N}(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$Z_N = \sum_{\theta_1, \dots \theta_N} \langle \theta_1 | V | \theta_2 \rangle \langle \theta_2 | V | \theta_3 \rangle \dots\dots \langle \theta_{N-1} | V | \theta_N \rangle$$

$$= \sum_{\theta_1, \theta_N} \langle \theta_1 | \, V^{N-1} \, | \theta_N \rangle$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & & & \\ e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & & \\ & e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & e^{-J_1} \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{J_1} = e^{J \cos \frac{2\pi}{n}}, \quad e^{J_2} = e^{J \cos \frac{2\pi}{n} 2} \quad \dots \quad e^{J_i} = e^{J \cos \frac{2\pi}{n} i}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & & \\ e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & \\ & e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & e^{-J_1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |n-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad , \quad X|1\rangle = |2\rangle \quad , \quad \cdots \quad X|n-1\rangle = |0\rangle$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots$$

$$V = 1 + e^{J_1} X + e^{J_2} X^2 + \cdots + e^{J_{n-1}} X^{n-1}$$

$$Z_N = \sum_{\theta_1, \theta_N} \langle \theta_1 | V^{N-1} | \theta_N \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle i | V^{N-1} | j \rangle$$

$$= \langle \xi_0 | V^{N-1} | \xi_0 \rangle$$

$$|\xi_0\rangle = |0\rangle + |1\rangle + \cdots |n-1\rangle$$

$$X |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle$$

$$V |\xi_0\rangle = \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{J_i} \right) |\xi_0\rangle$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{J \cos \frac{2\pi}{n} i} \right) |\xi_0\rangle$$

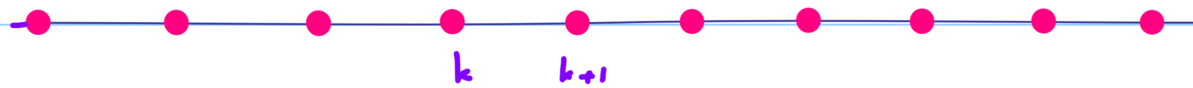
$$= \mu_1(n,J) \, |\xi_0\rangle$$

$$\rightarrow \quad Z_N(J) = \langle \xi_0 | \xi_0 \rangle \, [\mu_1(n,J)]^{N-1}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{Z_N(J) = n \, [\mu_1(n,J)]^{N-1}}$$

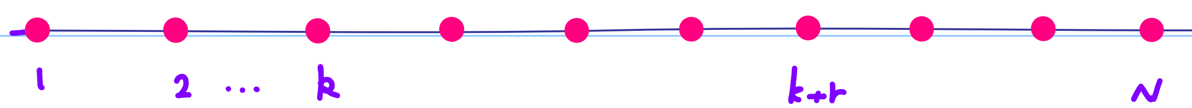
- تمرین : با استفاده از روش ماتریس انتقال ، تابع همبستگی را محاسبه کنید.

Correlation functions :



$$\langle S_k \cdot S_{k+1} \rangle = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial J} Z$$

But what is $\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = ?$



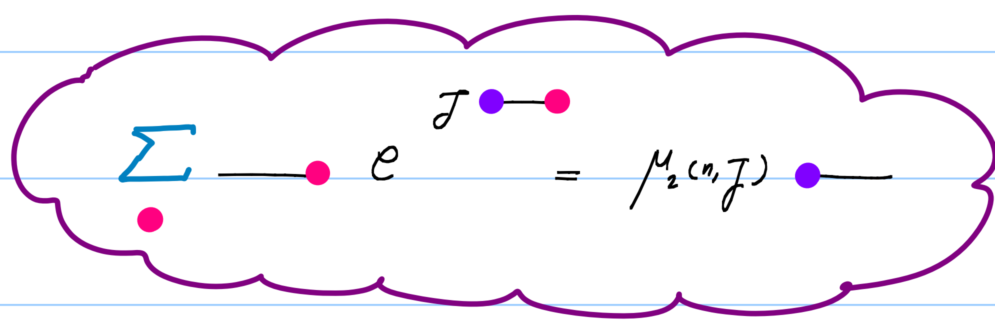
$$\boxed{G(r) = \langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+r} \rangle = \langle \cos(\theta_i - \theta_{i+r}) \rangle.}$$

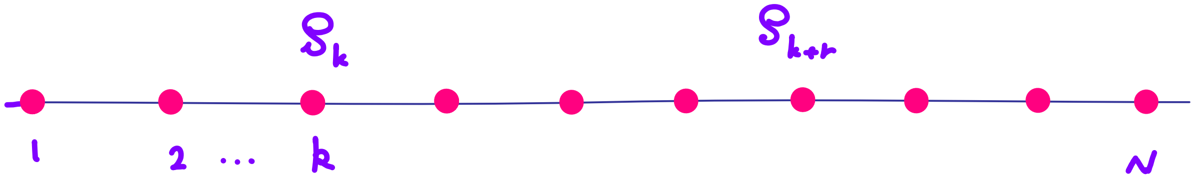
$$\langle \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{k+r} \rangle = \frac{\sum_{S_1 \dots S_N} \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{k+r} \, e^{J(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \dots \vec{S}_{N-1} \cdot \vec{S}_N)}}{Z_N}$$

$$\sum_{S'} e^{J S \cdot S'} = \mu_1(n, J)$$

$$\sum_{S} \vec{S}' e^{J \vec{S} \cdot \vec{S}'} = \mu_2(n, J) \, \vec{S}$$

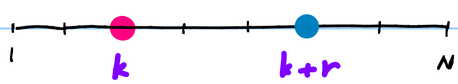
$$\boxed{\mu_2(n, J) = \frac{d \mu_1(n, J)}{dJ}}$$





$$\langle S_k\cdot S_{k+r}\rangle = \frac{1}{Z_N}\sum_{\{S\}} S_k\cdot S_{k+r}\; e^{J S_1\cdot S_2}\cdots\cdots e^{J S_{N-1}\cdot S_N}$$

$$\langle S_k\cdot S_{k+r}\rangle = \frac{A_N}{Z_N}$$

$A_N = \sum$ 

$e^{J S_1\cdot S_2}\, e^{J S_2\cdot S_3}\cdots e^{J S_{N-1}\cdot S_1}$

$$= [\mu_1(n,J)]^{k}\,[\mu_2(n,J)]^{r}\,[\mu_1(n,J)]^{N-k-r}$$

$$\rightarrow \boxed{\langle S_k\cdot S_{k+r}\rangle = \left[\frac{\mu_2(n,J)}{\mu_1(n,J)}\right]^{r}}$$

ضمیمه: تعریف مشخصه اویلر.

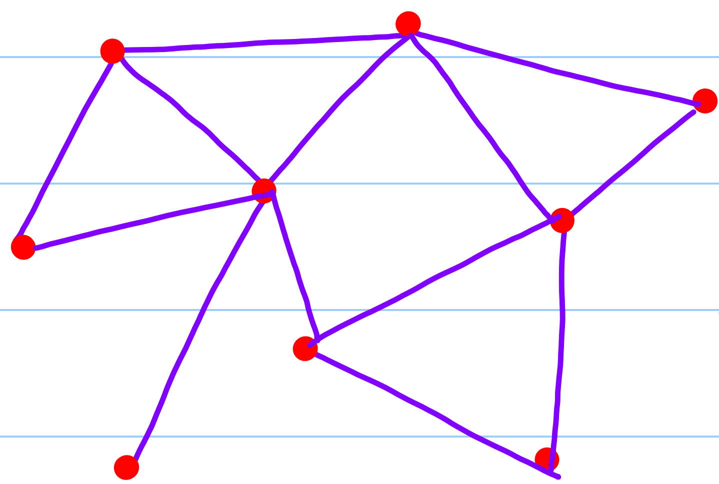
$$\chi = V - E + F$$

χ فقط به توپولوژی سطح بستگی دارد و نه به نوع مثلث‌بندی آن.

$\chi(\text{sphere}) = 2$

$\chi(\text{plane}) = 1$

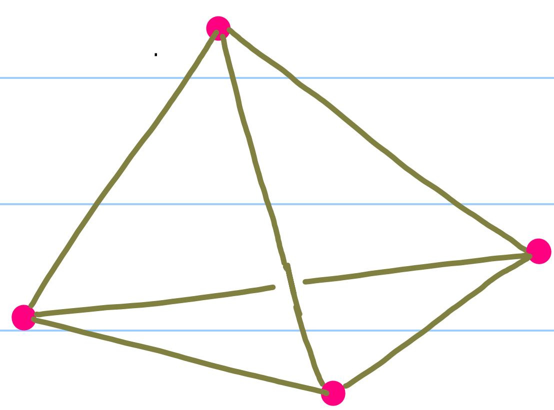
$\chi(\text{Torus}) = 0$



plane

$\chi = 9 - 13 + 5$

$= 1$

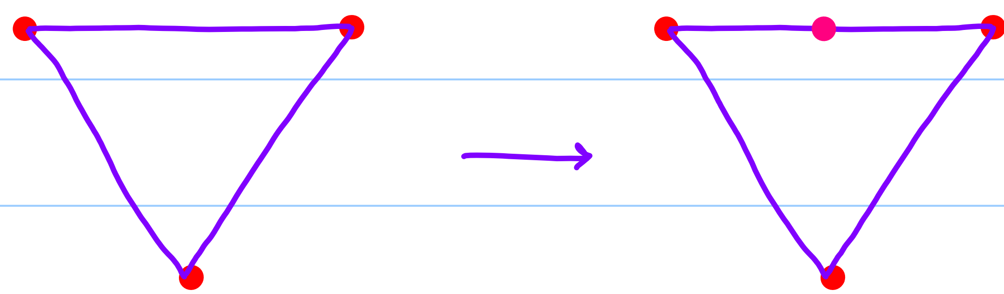


sphere

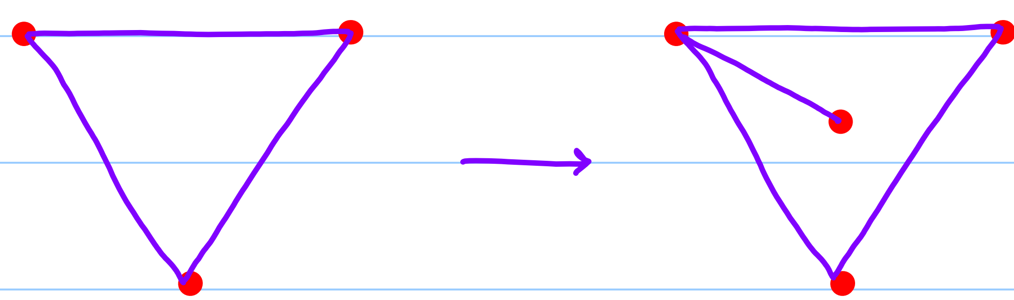
$\chi = 4 - 6 + 4 = 2$

اثبات :

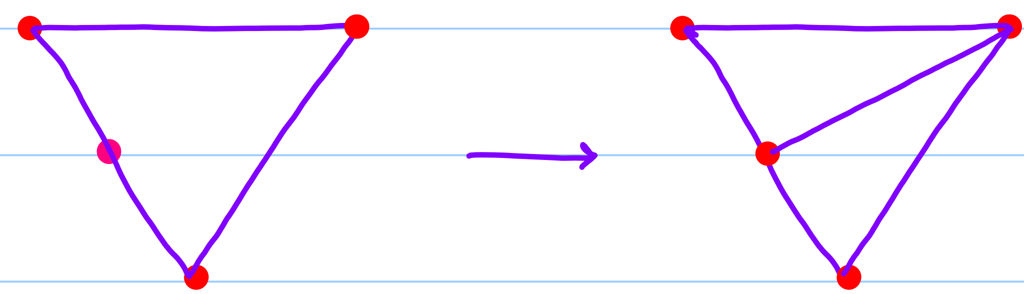
حرکت‌های ابتدایی که نوع مثلث‌بندی را تغییر می‌دهند.



$V \longrightarrow V+1, \quad E \longrightarrow E+1 \qquad \chi \longrightarrow \chi$

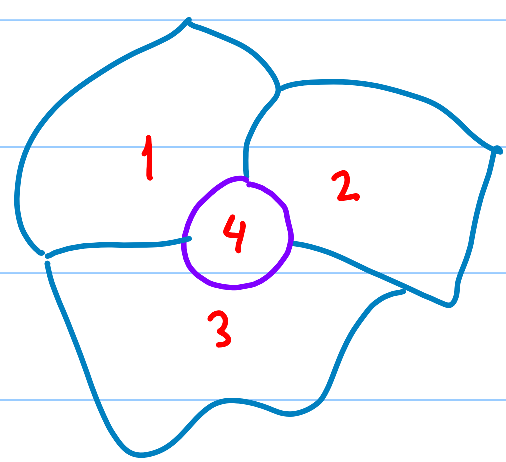


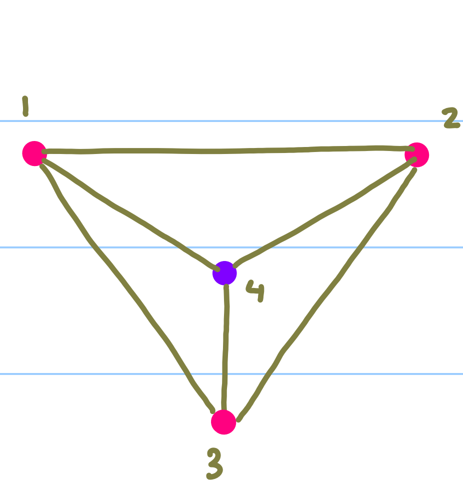
$V \longrightarrow V+1, \quad E \longrightarrow E+1 \qquad \chi \longrightarrow \chi$



$E \to E+1, \quad F \to F+1, \quad \chi \to \chi.$

مثال : نقشه‌ای روی صفحه دو به دو و گراف مربوط به آن :





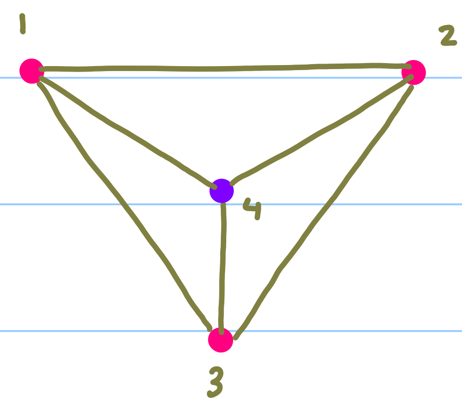
$$\chi = V - E + F$$

$$= 4 - 6 + 3 = 1$$

در مثال قبلی نقشه را روی یک صفحهٔ مسطح در نظر گرفتیم. اگر همین چهار کشور را روی کره در نظر بگیریم، دیگر ناحیهٔ بیرونی گراف

مربوط به یک مثلث نیز یکی از کشورها خواهد بود و دیگر نیازی نیست (123) نیز یک وجه مستقل خواهد بود و در نتیجه مشخصهٔ اویلر آن

برابر ۲ خواهد بود:



$$\chi = V - E + F$$

$$= 4 - 6 + 4 = 2.$$